www.revistahorizontes.org

Horizontes. Revista de Investigación en Ciencias de la Educación
https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v6i24.387
Volumen 6 / No. 24, Edición Extraordinaria
junio 2022
ISSN: 2616-7964
ISSN-L: 2616-7964
pp. 933 - 946

Diseño de una actividad formativa para futuros profesores de matemáticas sobre construcciones euclidianas con GeoGebra

Design of a teaching activity for future mathematics teachers on Euclidean constructions with GeoGebra

Desenho de uma atividade de formação para futuros professores de matemática em construções euclidianas com GeoGebra

PROPUESTA EDUCATIVA

Irene V. Sánchez Noroño
irsanchez@unap.cl
https://orcid.org/0000-0001-9176-0125
Universidad Arturo Prat. Iquique, Chile

Juan Luis Prieto G.
juanl.prietog@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-0798-5191
Aprender en Red. Maracaibo, Venezuela

Artículo recibido el 30 de agosto 2021 | Aceptado el 30 de mayo 2022 | Publicado el 30 de junio 2022

RESUMEN

El presente manuscrito describe los elementos del diseño de una actividad formativa sobre construcciones euclidianas con GeoGebra. La actividad formativa se sustenta en la idea de aprendizaje que propone la Teoría de la Objetivación, una teoría histórico cultural de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, la cual se complementa con el concepto de Actividad de Leontiev. Al concatenar estas ideas emergen los elementos que estructuran la actividad formativa. Los elementos de la actividad se orientan a movilizar determinados saberes geométricos, en atención a la resolución de las tareas de construcción euclidianas con GeoGebra. El diseño de la actividad formativa representa un primer paso para conocer el rol que desempeñan artefactos digitales, como el GeoGebra, en el aprendizaje geométrico.

Palabras clave: Aprendizaje; Actividad; Formación de profesores; Geometría; Teoría de la Objetivación

ABSTRACT

This manuscript describes the design elements of a training activity on Euclidean constructions with GeoGebra. The training activity is based on the idea of learning proposed by the Objectivation Theory, a cultural-historical theory of the teaching-learning of mathematics, which is complemented by the concept of Leontiev's Activity. By concatenating these ideas, the elements that structure the training activity emerge. The elements of the activity are aimed at mobilizing certain geometric knowledge, in attention to the resolution of Euclidean construction tasks with GeoGebra. The design of the training activity represents a first step to understand the role played by digital artifacts, such as GeoGebra, in geometric learning.

Key words: Learning; Exercise; Teacher training; Geometry; Objectification Theory

RESUMO

Este manuscrito descreve os elementos de design de uma atividade de treinamento sobre construções euclidianas com o GeoGebra. A atividade formativa é baseada na ideia de aprendizagem proposta pela Teoria da Objetivação, uma teoria histórico-cultural do ensino-aprendizagem da matemática, que é complementada pelo conceito de Atividade de Leontiev. Ao concatenar essas ideias, emergem os elementos que estruturam a atividade formativa. Os elementos da atividade visam mobilizar determinados conhecimentos geométricos, em atenção à resolução de tarefas de construção euclidiana com o GeoGebra. O desenho da atividade de treinamento representa um primeiro passo para entender o papel desempenhado por artefatos digitais, como o GeoGebra, na aprendizagem geométrica.

Palavras-chave: Aprendizagem; Exercício; Formação de professores; Geometria; Teoria da Objetivação

INTRODUCCIÓN

Uno de los temas que ha interesado a quienes investigan la formación del profesorado de matemáticas se refiere al aprendizaje del futuro profesor (Cameron et al., 2013; Goos, 2013; Llinares y Valls, 2009; Prieto y Valls, 2010; Ribeiro y da Ponte, 2019; Towers, 2010). Con respecto a este fenómeno, los investigadores han sentido la necesidad de comprender tanto la naturaleza, origen y fuentes del saber que los futuros profesores de matemáticas requieren aprender durante su formación universitaria para hacer frente a las demandas del sistema educativo (Vezub, 2016), como los procesos de producción de este saber en la actividad formativa (Depaepe et al., 2013; Neubrand, 2018; Valente, 2017). En la atención de esta necesidad ha surgido una línea de trabajo centrada en la producción de algunos principios teóricos (materiales y simbólicos) y de formas de usar estos principios en la formación de profesores para provocar el aprendizaje matemático y/o didáctico en los futuros profesores (Llinares, 2014; Tirosh y Wood, 2008), lo cual ha derivado en el reconocimiento del saber docente.

A lo interno del campo, el tema de los saberes docentes, necesarios en la formación inicial de profesores de matemática, es amplio y controvertido. Sin embargo, Tardif (2002) converge en que estos saberes son plurales y no acabados, es decir, se alimentan continuamente desde la formación y en el desarrollo profesional. Entre esta pluralidad de saberes se encuentran los disciplinares, los cuales están en correspondencia con las áreas de estudio de la matemática, incluyendo los saberes geométricos. Los saberes geométricos, como componente disciplinar de los saberes docentes pueden considerarse ancestrales, ya que los registros históricos dan cuenta de su existencia desde la antigua Babilonia, unos 6000 a.C. Uno de los primeros usos que hizo el hombre de los saberes geométricos fue a través de la medición de terrenos, lo que da origen a la geometría. La medición de terrenos fue una de las situaciones que permitió la movilización del saber en el tiempo, pero no fue la única. Llegado su momento, la geometría evolucionó en modos sofisticados de pensar geométricamente, siendo las demostraciones (modelo axiomático) y construcciones geométricas las formas por excelencia que movilizaban el saber.

Las construcciones geométricas tenían su particularidad, y es que demandan del uso de ciertos artefactos materiales como la regla y compás (R y C, en adelante), los cuales eran consustanciales del saber. Durante muchos años, éstos fueron los únicos artefactos empleados en las construcciones geométricas, con ciertas variaciones (en el caso de la regla paso de ser no graduada a graduada según determinados sistemas de medición), pero en esencia eran los mismos. En la década de los 90´s, con el auge y desarrollo de las tecnologías digitales, inicio la creación de Artefactos Digitales (ADs) destinados a la enseñanza y aprendizaje de la geometría, y de la matemática en general, que hacían posible potenciar el estudio de la geometría. Muy a pesar de las ventajas y oportunidades que pueden ser promovidas con los ADs, su integración eficiente y permanente en las actividades de enseñanza y aprendizaje continúan siendo complejas y por demás polémica, aunque se cuente con estos artefactos en las escuelas (Acosta, 2007; Rojano, 2014).

Entre las razones por las cuales un profesor puede optar por descartar los ADs como artefactos legítimos de la actividad del aula se encuentran, por un lado, la visión de los profesores sobre sus estudiantes, la cultura institucional y el rol de estos ADs en la enseñanza y, por otro lado, la rigurosa estructura escolar, en relación a los horarios y responsabilidades del profesor, así como la organización de los espacios que terminar por alejar a este sujeto de la posibilidad de utilizar ADs (Goos, 2014). Mientras que aquellos profesores que emplean ADs lo hacen de forma restrictiva, subutilizando estos recursos para cálculos rápidos y confiables o para realizar representaciones más estéticas que con otros artefactos, pero las actividades del aula siguen siendo las mismas (Buckingham, 2006; Villareal, 2012).

Por lo anterior, se afirma el protagonismo del profesor para dar validez y legitimidad a estos artefactos en las actividades de enseñanza y aprendizaje (Hoyles y Lagrange, 2010). Dicha situación convoca a los formadores de profesores de matemáticas a promover actividades formativas desde las cuales los futuros profesores puedan reflexionar sobre las transformaciones que se derivan al trabajar geometría con ADs, la naturaleza de la actividad, el rol del profesor y el alumno cuando se involucran estos ADs y otras situaciones, de modo que puedan superar la visión simplista que predomina en torno a estos artefactos como un mero amplificador del contenido. Un estudio de revisión de literatura realizado por Santana y Gómez (2019) mostró que aquellos profesores de matemática que utilizaban ADs en su práctica se debía a que durante su formación habían tenido experiencias en torno a éstos. Esto sugiere que en la formación inicial se cimientan una parte de las metodologías y actividades de trabajo que los futuros profesores emplearán en sus clases.

Con la intención de acercar al futuro profesor con la realidad escolar que le espera, el presente trabajo describe el diseño de una actividad formativa que busca promover el aprendizaje de saberes geométricos en futuros profesores de matemática y física, involucrados en la resolución conjunta de tareas de construcciones euclidianas con GeoGebra. El trabajo se enmarca en un proyecto de investigación más amplio que buscar analizar el rol que desempeña el Software de Geometría Dinámica (SGD) en el desarrollo del pensamiento geométrico de profesores y futuros profesores de matemáticas de la región de Tarapacá (Chile), quienes participan en actividades de formación especialmente diseñadas para tal fin.

La Construcciones euclidianas con geogebra como saber necesario para la enseñanza de la geometría constituye la emergencia de la perspectiva sociocultural en el campo de la Educación Matemática ha favorecido la ampliación y diversificación de teorías acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde diferentes enfoques. Una de estas teorías, de corte histórico-cultural, se conoce con el nombre de Teoría de la Objetivación (TO) (Radford, 2006; 2014; 2020). En la TO, el compromiso de la Educación en general, y de la Educación Matemática, en particular, no está exclusivamente del lado del contenido disciplinar (saber), sino que integra de manera especial la formación del sujeto (ser) que aprende, como dos aspectos que no pueden desligarse uno del otro, ya que se nutren, acompañan y retroalimentan permanentemente.

En cuanto al saber, la TO le define como “una síntesis de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y reflexión, constituidos histórica y culturalmente” (Radford, 2020, p. 16). Visto así, el saber no se considera como un producto terminado, sino como un proceso social e histórico, por ende, inacabado en el tiempo, que favorece la transformación del saber de cultura en cultura, según las necesidades y requerimientos de la época en que se vive. La idea del saber cómo proceso social e histórico es clave en la TO, pues ayuda a entender que la actividad humana es la forma por excelencia que tienen los individuos de materializar el saber en la realidad concreta; esto por medio de las acciones, reflexiones, sufrimientos y esperanzas de quienes se involucran en la actividad (Radford, 2017a).

En la actividad, los artefactos culturales juegan un papel fundamental en tanto son consustanciales del pensamiento humano y no simples medios o amplificadores. Los artefactos que entran en juego en la actividad tienen la huella del saber que la humanidad ha depositado en ellos, favoreciendo en su uso las posibilidades de expresión, acción y pensamiento de los sujetos. Por ejemplo, en la antigua Babilonia (6000 a.C.), el saber geométrico se constituía alrededor de la medición de terrenos y el cálculo de área y volumen, para lo cual los sujetos de esa época hacían uso de cuerdas y estacas como artefactos culturales que les permitían materializar la medición como saber en la práctica concreta, lo que más tarde se llamó geometría práctica. A partir de lo anterior, es posible afirmar que el saber geométrico comprende esas síntesis o esquemas prototípicos de expresión, acción y pensamiento a las que recurren los individuos para reflexionar, plantear y resolver problemas geométricos de determinada manera, y han ido evolucionando de forma progresiva a lo largo del tiempo. Un tipo de problema geométrico clásico de la antigüedad y que aún tiene vigencia en el currículo de matemáticas de muchos países, incluyendo Chile, son las construcciones con regla y compás.

Estas construcciones, fueron promovidas por Euclides en su libro los “Elementos”, en el cual propone dos tipos de problemas (demostraciones y construcciones con regla y compás), los cuales sientan las bases del método axiomático y/o pensamiento hipotético-deductivo que conocemos actualmente. En los problemas de construcción, se podían distinguir tres partes. La primera era el enunciado del problema, llamada explicación de la proposición. La segunda parte, llamada operación, incluía la solución del problema, es decir, la construcción del objeto geométrico que se demanda. La tercera parte consistía en la argumentación que justifica la validez del objeto construido, denominada demostración. En estos tipos de problemas, la regla (sin marcas) era portadora de una conceptualización que permitió a los geómetras griegos trazar segmentos –de recta- a partir de dos puntos cualesquiera. Y, el compás (colapsable) fue usado por estos sujetos para materializar la definición de circulo dado su centro y un radio (Euclides, 1991).

Durante muchos años estos artefactos (reglas y compás) permanecieron inertes en las construcciones geométricas, sin embargo, la llegada de la tecnología digital al campo de la Educación Matemática ha creado condiciones para nuevas formas de aproximación a los saberes geométricos y un cambio sustancial de la actividad de enseñanza y aprendizaje (en algunos de sus aspectos). Desde finales del siglo pasado, la geometría euclidiana ha experimentado estas transformaciones como consecuencia del uso de los SGD en la actividad del aula (Artigue, 2002, 2012; Laborde, 1997). Un SGD es un artefacto semiótico que muestra su potencial en la forma cómo éste permite diferenciar entre objeto geométrico (representado) y dibujo (representante), mediante la manipulación directa que se puede hacer sobre el dibujo, lo que permite comprobar que las invariantes geométricas se conservan (Sandoval y Moreno-Armella, 2012). Cuando esto ocurre, se está en presencia de un dibujo dinámico.

Al hacer uso de un SGD, los estudiantes tienen la posibilidad de pensar y actuar en términos geométricos, según la configuración de este artefacto, lo que deriva en cierta lógica de funcionamiento que es particular de cada software. A su vez, el SGD promueve ciertas interacciones humanas que determinan los modos y formas de producción que se desarrollan (Radford, 2006). En particular, el GeoGebra, un tipo de SGD, presenta al usuario la posibilidad de pensar en términos geométricos a través de herramientas y funcionalidades dinámicas las cuales encapsulan y portan el contenido conceptual (Sánchez-S. y Prieto, 2019). Esta forma, en la que presenta el GeoGebra el contenido conceptual, no garantiza que el saber geométrico sea aparente por sí solo, tal como se ha venido comentando es necesario que éste (artefacto) sea incorporado en una actividad permita movilizar tales conceptualizaciones

Tal como se ha comentado, las construcciones con regla y compás, llamadas de aquí en adelante construcciones euclidianas, constituyen un saber geométrico esencial en el estudio de la geometría y su enseñanza que merece ser estudiado con los artefactos culturales de reciente data, como el GeoGebra (Cenas et al., 2021). Esto corresponde con las demandas de los planes de estudios actuales que sugieren a los profesores hacer sus clases con algún software educativo. En línea con estas ideas, los planes de formación de profesores deben propiciar actividades de este estilo que les permitan conocer el trabajo geométrico que puede desarrollarse con software educativo. En particular, la carrera de Pedagogía en Matemática y Física impartida por la Universidad Arturo Prat contempla, en su plan de estudios, la asignatura Geometría, donde una de sus unidades se orienta al estudio del saber sobre construcciones geométricas. En el desarrollo de esta asignatura se tiene previsto implementar la actividad que se describe en este manuscrito.

El aprendizaje de las construcciones euclidianas con geogebra como procesos de objetivación

La TO considera el aprendizaje como el encuentro progresivo de los individuos con el saber histórico y cultural (Radford, 2017a). De forma más operativa, la TO define el aprendizaje como procesos de objetivación, es decir,

> (…) procesos sociales, colectivos de toma de conciencia: toma de conciencia progresiva y crítica, de un sistema de pensamiento y acción cultural e históricamente constituido, sistema que gradualmente notamos, y que al mismo tiempo dotamos de sentido. Los procesos de objetivación son aquellos procesos de notar algo culturalmente significativo, algo que se revela a la conciencia no pasivamente sino por medio de la actividad corpórea, sensible,

afectiva, emocional, artefactual y semiótica. (Radford, 2020, p. 22).

Para que un saber se convierta en objeto de conciencia para el individuo, éste debe ser movilizado por medio de una actividad. La actividad, en la TO, se conceptualiza como labor conjunta, en un esfuerzo de diferenciar esta categoría humana de otras acepciones que son de tipo funcionales y técnicas reducidas a un cúmulo de acciones para el logro de un objetivo (Radford, 2020). De esta manera, la labor conjunta es definida como "una forma de vida, algo orgánico y sistémico, un evento creado por una búsqueda común –es decir una búsqueda con otros–de la solución a un problema planteado, búsqueda que es al mismo tiempo cognitiva, emocional y ética" (Radford, 2017b, p. 125).

Es así como la actividad formativa se caracteriza por ser la labor conjunta que tiene lugar cuando formadores y futuros profesores de matemática, se abocan a la resolución de problemas de construcciones euclidianas. La toma de conciencia es un proceso de formación y trasformación en la cual los sujetos se posicionan críticamente ante las formas codificadas de pensar y actuar que ha sido constituidas histórico y culturalmente, mediante un proceso de reflexión subjetiva y emocional de la realidad concreta donde se encuentra del sujeto. (Raford, 2013, 2017b). Al respecto, la toma de conciencia de las construcciones euclidianas con GeoGebra favorece el posicionamiento crítico de los futuros profesores ante dicho saber.

El GeoGebra tal como se comentó anteriormente, presenta el contenido conceptual por medio de herramientas y funcionalidades que son portadores de conceptos que revelan el contenido conceptual geométrico (constituido por la humanidad a lo largo de la historia), a su vez brinda al usuario un sistema de representación y campo de exploración que permite enriquecer la actividad y que en medios estáticos como lápiz y papel son poco factibles (Sandoval y Moreno-Armella, 2012). Una característica que tienen este software es que, en las representaciones de los objetos geométricos, las propiedades o invariantes geométricas de estos objetos permanecen inalterables cuando éstos se intentan deforman según el arrastre (Laborde, 1997). Esto permite que la imagen dinámica (sensorio-motriz) que se forma un estudiante al hacer construcciones es distinta a la que se forma con el uso de otras herramientas.

Por ejemplo, pensemos en dibujar un rectángulo en el software GeoGebra. Para ello, lo primero es seleccionar la herramienta ideal que permita la construcción, en este caso será "Polígono" la cual sugiere al usuario una forma de construir esta figura para la cual el software debe informar los vértices que la definen (Figura 1). De esta manera, la herramienta Polígono tiene un concepto particular que se puede materializar en la construcción del rectángulo. Además, como se muestra en la Figura 1, cada herramienta y funcionalidad de GeoGebra tiene cierta lógica de funcionamiento, en forma de condición que el usuario debe proporcionar al software, condiciones que enfatizamos, no son neutrales ni ingenuas, sino una parte fundamental del conocimiento matemático depositado estas herramientas (Sandoval y Moreno-Armella, 2012).

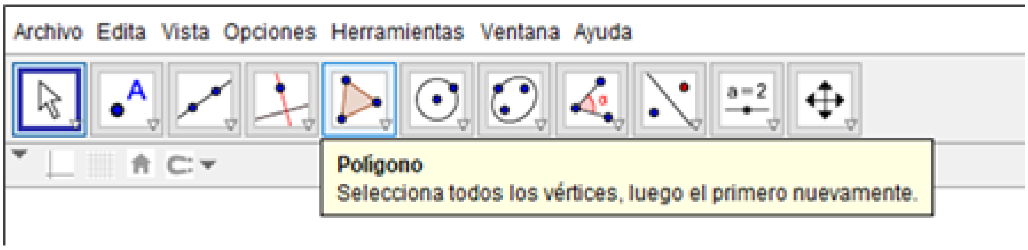


***Figura* 1.** Conceptualización del polígono mediante la herramienta correspondiente. Fuente: Elaboración propia (2020).

ELEMENTOS DEL DISEÑO

Para la descripción de la actividad formativa, asumimos los siguientes elementos que la estructuran (Radford, 2017a):

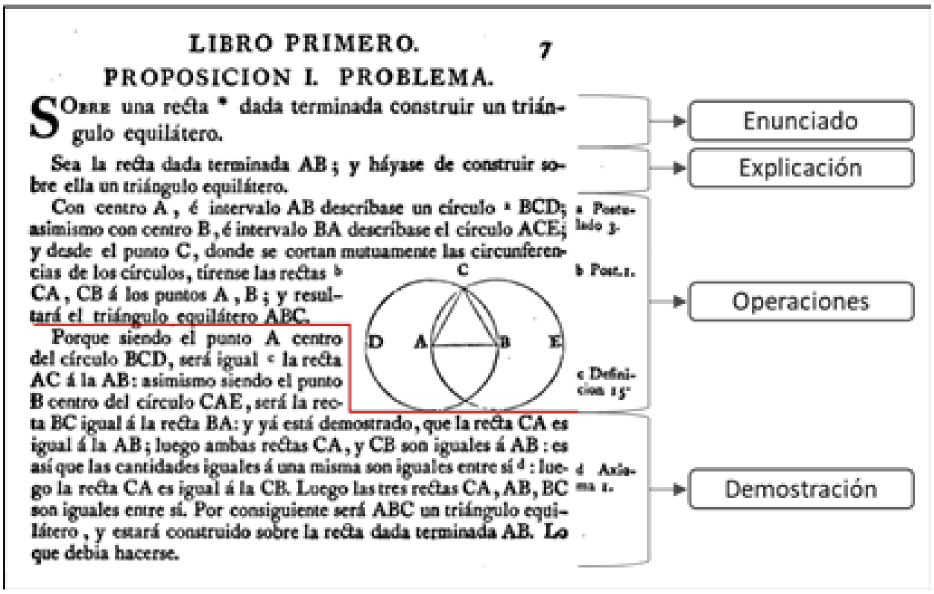
Objeto y metas de la actividad formativa

Toda actividad de aprendizaje se despliega en la dirección de su objeto, el cual "puede ser tanto material como ideal, tanto dado en la percepción como existente solo en la imaginación, en el pensamiento" (Leontiev, 1984, p. 82). Este objeto responde siempre a una necesidad y debe ser identificado a priori por el proyecto didáctico del profesor (Radford, 2006). En el diseño, asumimos que la actividad formativa tiene por objeto el encuentro de futuros profesores de matemáticas con determinados procedimientos de construcción de figuras geométricas planas (p. e., puntos, segmentos, rectas, semirrectas, ángulos, triángulos), usando el software GeoGebra, los cuales constituyen el saber histórico y cultural que se espera sea movilizado.

Para lograr este objeto, fue necesario que el trabajo de los futuros profesores se orientara hacia aquellas acciones que caracterizan el saber acerca de las construcciones geométricas con GeoGebra, a saber:

- Construir el dibujo dinámico que dé respuesta a la tarea propuesta.
- Comunicar (en forma oral y/o escrita) el procedimiento de construcción del dibujo dinámico.
- Probar la consistencia geométrica de este procedimiento.

Estas acciones se reconocen a partir de la estructura de los problemas de construcción de figuras geométricas planas con regla y compás, tal como aparece en determinadas fuentes históricas (ver Figura 2).



LIBRO PRIMERO. 7

PROPOSICION I. PROBLEMA.

SObre una recta * dada terminada construir un triángulo equilátero.

Sea la recta dada terminada AB; y háyase de construir sobre ella un triángulo equilátero.

Con centro A, é intervalo AB descríbase un círculo a BCD; asimismo con centro B, é intervalo BA descríbase el círculo ACE; y desde el punto C, donde se cortan mutuamente las circunferencias de los círculos, tírense las rectas b CA, CB á los puntos A, B; y resultará el triángulo equilátero ABC.

Porque siendo el punto A centro del círculo BCD, será igual c la recta AC á la AB: asimismo siendo el punto B centro del círculo CAE, será la recta BC igual á la recta BA: y yá está demostrado, que la recta CA es igual á la AB; luego ambas rectas CA, y CB son iguales á AB: es así que las cantidades iguales á una misma son iguales entre sí d: luego la recta CA es igual á la CB. Luego las tres rectas CA, AB, BC son iguales entre sí. Por consiguiente será ABC un triángulo equilátero, y estará construido sobre la recta dada terminada AB. Lo que debia hacerse.

a Postulado 3.
b Post. 1.
c Definicion 15.
d Axioma 1.

Figura **2.** Estructura de las proposiciones. Fuente:

Tareas

En este diseño, las tareas de la actividad formativa tienen el propósito guiar a los estudiantes hacia la realización de las acciones anteriores. En ambientes de geometría dinámica, Laborde (1997) denomina tareas de producción de Cabri-dibujos a las tareas que demandan la construcción de:

> (…) un dibujo en la pantalla que conserve ciertas propiedades espaciales impuestas cuando se desplace uno de los puntos básicos del dibujo. La tarea para el alumno consiste, por tanto, en elaborar un procedimiento de producción del Cabri-dibujo, basado en las primitivas geométricas disponibles. (Laborde, 1997, p. 42).

El contenido geométrico de cada tarea ha sido definido a partir de determinados problemas elementales de construcción con regla y compás (proposiciones), presentes en la obra Elementos de Euclides (1991) y que hacen parte del programa de la asignatura Geometría, de la malla curricular de la carrera de Pedagogía en Matemáticas y Física de la Universidad Arturo Prat. Para la selección de las proposiciones, fueron recopilados los problemas referidos a construcciones con regla y compas que aparecen en las obras históricas de Euclides (traducción de Simson, 1774; Tosca, 1707), y dos textos de geometría (López, 2000; Moise y Downs, 1989). Una vez, recopilados los problemas se realizó la selección de ocho proposiciones que estaban presentes en todas las fuentes consultadas.

Las proposiciones seleccionadas debían pasar por un proceso de transformación a tareas de construcción que debían ser resueltas en el GeoGebra. Este proceso de transformación se realizó por etapas. En la etapa 1, se identificó los elementos que componen el enunciado de la proposición original, estos son: la hipótesis (exposición y objeto dado) y la tesis (objeto demandado). En la etapa 2, se realizó una adecuación de las partes del enunciado de la proposición al español moderno, dada la antigüedad de las obras. En la etapa 3, se estableció la relación entre los objetos dados y demandados en el enunciado de las proposiciones con los objetos correspondientes en el software GeoGebra.

Para ilustrar esta etapa, la proposición I.1 enuncia el siguiente problema “Sobre una recta dada, y terminada, construir un triángulo equilátero” (Simson, 1774). En el enunciado, el segmento se presenta como objeto dado, y el triángulo equilátero como objeto demandado, con la indicación que los lados del triángulo sean del tamaño de dicho segmento. La sintaxis del GeoGebra, para el caso de los segmentos tiene al menos dos maneras de nombrarlo/rotularlo, bien sea a través de sus extremos ($\overline{AB}$) o mediante una letra minúscula (m). Dicha característica permitió producir varias tareas de construcción referidas a un mismo tipo de tarea. En la etapa 4, se redactó y refinó el enunciado de cada tarea de construcción, a partir de los elementos identificados en el software. En la figura 3, se ilustra este proceso con un caso particular

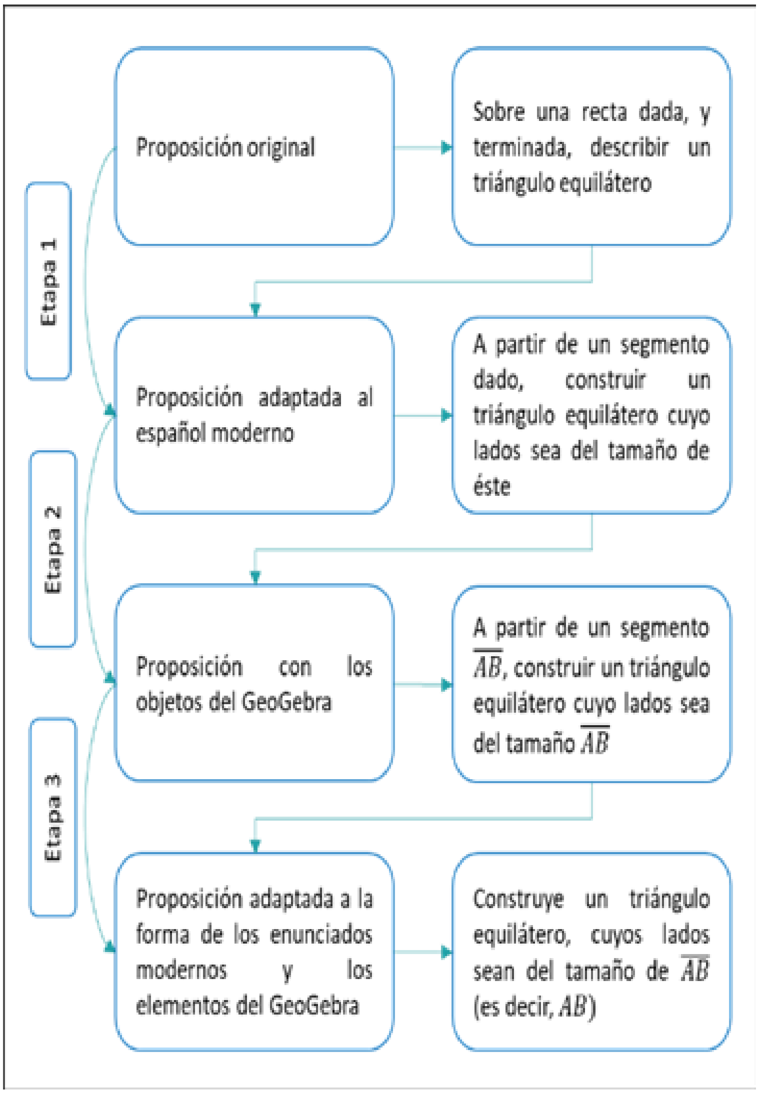


***Figura* 3.** Primeras etapas del proceso de adaptación de las proposiciones a tareas de construcción con GeoGebra.

En la etapa 5, se abocó a la elaboración de las hojas de trabajo con GeoGebra para cada tarea de construcción (ver Figura 4a). Y en la etapa 6, se realizó una hoja de instrucciones para los futuros profesores (ver Figura 4b). En total se realizaron once tareas de construcción.

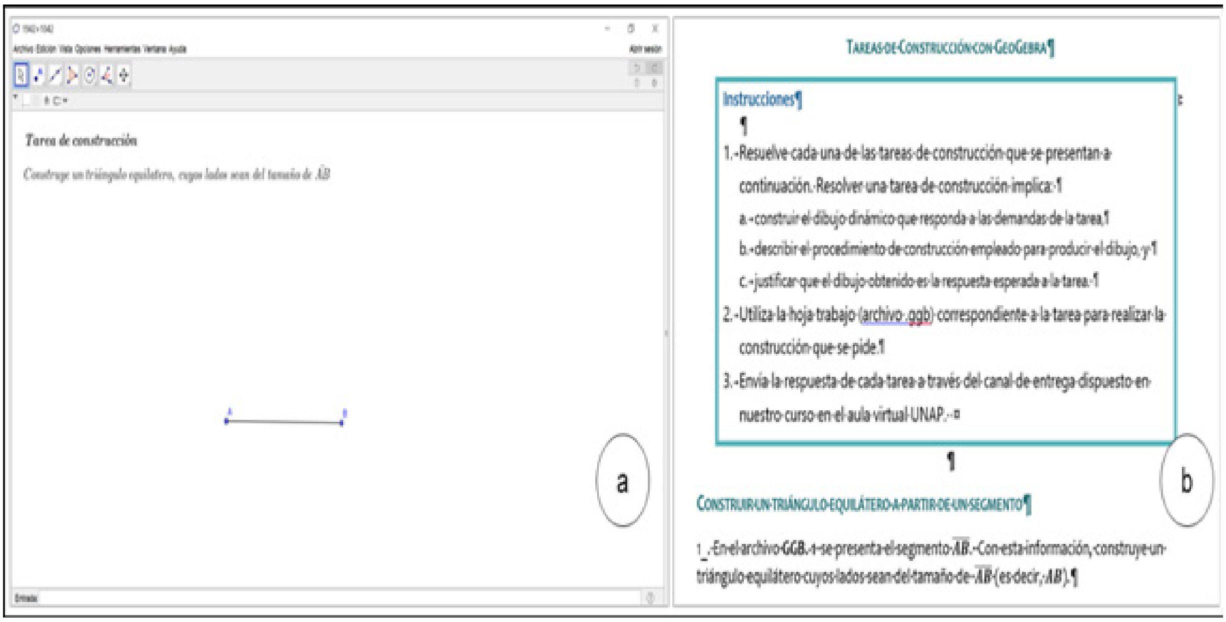


Figura **4.** Instrucciones y hoja de trabajo ggb.

Ejemplo de la actividad formativa

La planificación de la actividad formativa tuvo en cuenta un contexto no presencial de clases, en espacios virtuales, debido a la pandemia COVID-19 (Cucinotta y Vanelli, 2020). Se tuvo previsto que el desarrollo de la actividad formativa se realizara durante varios encuentros, en cada uno de los cuales se busca promover la labor conjunta entre la formadora (primera autora de este manuscrito) y los futuros profesores en torno al saber acerca de las construcciones euclidianas con GeoGebra. En un primer momento de la actividad formativa (presentación de la tarea), la formadora presenta las tareas de construcción (hoja de instrucciones) a los futuros profesores y explica cómo se llevará a cabo el proceso de su resolución. En un segundo momento (búsqueda de respuestas), los futuros profesores se abocan a dar solución a las tareas de construcción, organizados grupos. En un tercer momento (interacción con pequeños grupos), la formadora ingresa en cada sala destinada para cada grupo, interactuando con los futuros profesores y ofreciendo retroalimentación. Finalmente, en un cuarto momento (interacción con todo el grupo), se realiza la interacción con todo el grupo para presentar las soluciones de los futuros profesores. En este último momento de la actividad, se espera que los futuros profesores, a partir de la presentación de un compañero, puedan preguntar críticamente o hacer sugerencias de mejora a la respuesta de la tarea. El encuentro, puede cerrar en este momento o pasar otro momento. En la Figura 5 se presenta el ciclo:

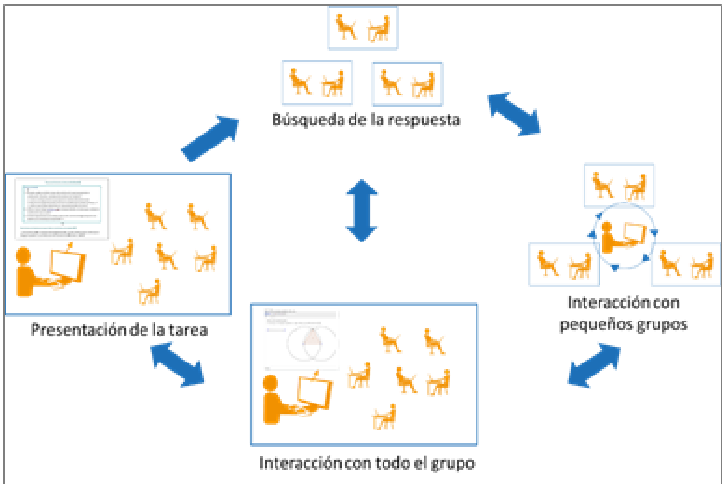


***Figura* 5.** Momentos del ciclo de la actividad. Fuente: elaboración propia basado en Radford (2017b).

Una respuesta hipotética a la tarea que se espera pudiera surgir de la actividad con los futuros profesores consiste en: un análisis de la tarea de construcción presentada en la cual reconozcan el objeto geométrico solicitado y las condiciones para su construcción. Considerando que el artefacto a ser empleado para dar respuesta a la tarea tiene su propia lógica de funcionamiento, se realiza un nuevo análisis, esta vez en función de cómo se puede construir el objeto solicitado, es decir, pensar en la herramienta del GeoGebra que permite dar respuesta a la tarea.

En este caso hipotético, la tarea que se presenta es la siguiente: *Construye un triángulo equilátero cuyos lados sean del tamaño de* $\overline{AB}$ *(es decir,* AB*)* (Ver Figura 6-a). Para realizar la construcción de un triángulo, el GeoGebra promueve la conceptualización de esta figura plana a través de herramienta *Polígono*, cuyo uso implica conocer los vértices de la figura a construir. Determinar éstos vértices constituye los pasos que posibilitan la representación del objeto solicitado. Pero, ya que el polígono buscado es uno en particular, la localización de esos vértices supone una secuencia de acciones que fijen las invariantes geométricas, propias del triángulo equilátero.

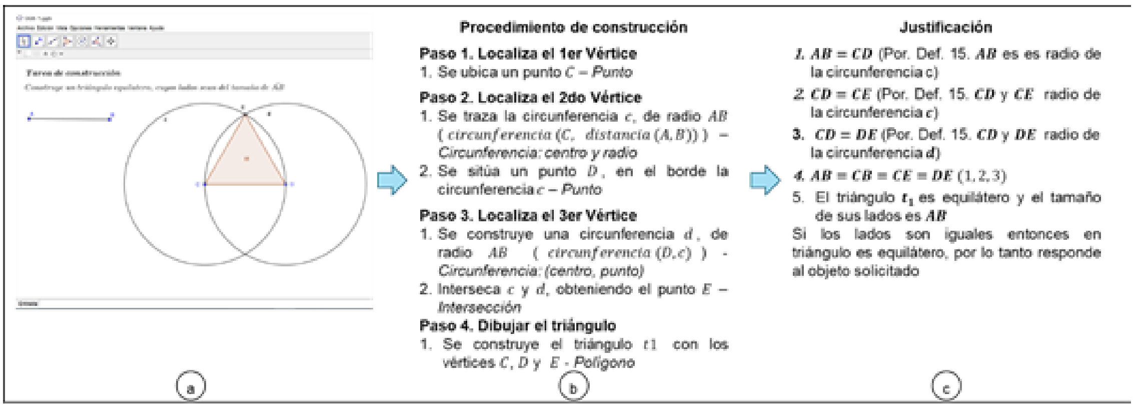


***Figura* 6.** Respuesta hipotética a la tarea.

Luego de realizar la construcción de la figura, los futuros profesores deben asegurase de que el dibujo dinámico tiene consistencia geométrica en el programa, lo que implica aplicar la prueba del arrastre, esto es, intentar deformar el dibujo al seleccionar uno de los puntos o elementos libres (Acosta, 2007; Arzarello et al., 2002; Laborde, 1997). Seguidamente, los futuros profesores deben comunicar el procedimiento de construcción que han empleado. En la Figura 6-b, se presenta la comunicación escrita del procedimiento de construcción producido para responder a la tarea. Después de comunicar el procedimiento, los futuros profesores deben justificar desde la teoría geometría que las acciones realizadas dan cuenta que el triángulo cumple las condiciones que la tarea les impone. En la Figura 6-c, se presenta un discurso que prueba la consistencia del proceso seguido, es decir, la justificación de cada uno de los vértices del triángulo.

CONCLUSIONES

En el presente manuscrito se ha descrito el diseño de una actividad formativa que busca favorecer el aprendizaje geométrico de los futuros profesores de matemáticas por medio de construcciones euclidianas con GeoGebra. Para el diseño de esta actividad, se consideró una perspectiva histórico-cultural del aprendizaje que presenta el saber cómo posibilidad de pensamiento, la cual, se complementó con los elementos de la teoría de la actividad (TA) de Leontiev. Al concatenar los elementos presentes en cada uno de los constructos de la TO y la TA, emergieron las componentes de la actividad. Estas componentes, permitirán la movilización de los saberes geométricos sobre construcción euclidianas con GeoGebra.

Las componentes de la actividad formativa, contempla una serie de momentos que en su conjunto contribuyen a la movilización del saber en atención a la resolución de las tareas de construcción geométrica con el GeoGebra. En los momentos de la actividad, se espera los futuros profesores sean capaces de (i) realizar la construcción del dibujo dinámico como respuesta a la tarea, (ii) comuniquen el procedimiento empleado para la construcción del dibujo dinámico y (iii) argumentar la consistencia del dibujo geométrico producido, así como, aportar a las posibles respuestas de sus compañeros de forma crítica y responsable. Todo lo anterior, se orienta a que los futuros profesores se hagan conscientes de la conceptualidad que se promueve con el uso del GeoGebra. Al respecto el estudio de Sandoval y Moreno-Armella (2012) plantea que las tecnologías digitales no son tan solo un soporte externo de la cognición, sino que se integran a ella y la transforman, en este orden de ideas con el EA diseñado se pretende que el ADs, permita sea más que un simple amplificador, si no que este sea parte consustancial del pensamiento. A modo de ejemplo, se presentó una respuesta hipotética en la cual se transita los momentos de la actividad, y lo que se espera de los futuros profesores. Una vez implementado el EA, emergerán nuevas investigaciones y refinamientos para la AE.

REFERENCIAS

Acosta, M. (2007) La teoría antropológica de lo didáctico y las nuevas tecnologías. En L. Higueras, A. Castro, y F. García. (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas: aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 85-100). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245–274

Artigue, M. (2012). Mathematics education and literacy. En Artigue, M. (Eds) *Challenges in basic mathematics education* (pp. 13-18). UNESCO

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34*(3), 66-72

Cameron, S., Mulholland, J. y Branson, C. (2013). Professional learning in the lives of teachers: towards a new framework for conceptualising teacher learning. *Asia-Pacific Journal of Teacher Education*, *41*(4), 377-397

Cenas, F. Y., Blaz, F. E., Gamboa, L. R., y Castro, W. E. (2021). GeoGebra: herramienta tecnológica para el aprendizaje significativo de las matemáticas en universitarios. *Horizontes. Revista de Investigación en Ciencias de la Educación*, *5*(18), 382–390. https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v5i18.181

Cucinotta, D., y Vanelli, M. (2020). WHO Declares COVID-19 a Pandemic. *Acta Biomed*, *91*(1), 157-160. https://doi.org/10.23750/abm.v91i1.9397

Goos, M. (2013). Sociocultural perspectives in research on and with mathematics teachers: a zone theory approach. *ZDM*, *45*, 521–533. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-012-0477-z

Hoyles, C., y Lagrange, J. B. (2010). *Mathematics education and technology: Rethinking the terrain*. Springer

Laborde, C. (1997). Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría. Investigar y enseñar. En L. Puig (Ed.). *Investigar y Enseñar. Variedades De La Educación Matemática* (pp. 33-48). Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica

Leontiev, A. (1984). *Actividad, Conciencia y Personalidad.* Editorial Cártago

Llinares, S. (2014). Experimentos de enseñanza e investigación. Una dualidad en la práctica del formador de profesores de matemáticas. *Educación matemática*, n° extraordinario, marzo, 31-51

Llinares, S. y Valls, J. (2009). The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: interaction and online video case studies. *Instructional Science*, *37*, 247–271. http://dx.doi.org/10.1007/s11251-007-9043-4

Prieto, J. L. y Valls, J. (2010). Aprendizaje de las características de los problemas aritméticos elementales de estructura aditiva en estudiantes para maestro. *Educación Matemática*, *22*(1), 57-85

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 132-150

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, *9*(Extraordinario 1), 103-129

Radford, L (2017a). Saber y conocimiento desde la perspectiva de la teoría de la objetivación. En B. D' Amore y L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y culturales* (pp. 97–114). Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Radford, L. (2017b). Aprendizaje desde la perspectiva de la teoría de la objetivación. En B. D' Amore y L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y culturales* (pp. 115–136). Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Radford, L. (2020). Un recorrido a través de la teoría de la objetivación. En S. Takeco Gobara y L. Radford (Eds.), *Teoria da Objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática* (pp. 15-42). Livraria da Física

Ribeiro, A. J. y da Ponte, J. P. (2019). Professional learning opportunities in a practice-based teacher education programme about the concept of function. *Acta Scientiae*, *21*(2), 49-74

Sánchez, I. C., y Prieto, J. L. (2019). Procesos de objetivación alrededor de las ideas geométricas en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *14*(1), 55-83. http://dx.doi.org/10.30827/pna.v14i1.8657

Sandoval, I. y Moreno-Armella, L. (2012). Tecnología digital y cognición matemática: Retos para la educación. *Horizontes Pedagógicos*, *14*(1), 21-29

Simson, R. (1774). *Los seis primeros libros y el undécimo, y duodécimo de los elementos de Euclides: traducidos de nuevo sobre la versión latina de Federico Comandino conforme a la fiel, y correctísima edición de ella.* Universidad Complutense de Madrid.

Tardif, M. (2002). *Los saberes del docente y su desarrollo profesional*. Narcea Editores

Tosca, T. (1707). *Compendio Mathematico. Tomo I: en que se contienen todas las materias más principales de las ciencias que tratan de la cantidad*. Imprenta de Antonio Bordazar

Towers, J. (2010). Learning to teach mathematics through inquiry: a focus on the relationship between describing and enacting inquiry-oriented teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*, 243–263. http://dx.doi.org/10.1007/s10857-009-9137-9

Vezub, L. F. (2016). Los saberes docentes en la formación inicial. La perspectiva de los formadores. *Pensamiento Educativo*, *53*(1) 1-14. https://doi.org/10.7764/PEL.53.1.2016.9

Villarreal, M. E. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *Virtualidad, Educación y Ciencia*, *3*(5), 73-94

Reconocimiento. El presente manuscrito, cuenta con financiamiento del Proyecto de Investigación (Decreto Exento 1238) "El rol de los artefactos digitales en la formación en geometría de profesores de matemáticas de la región de Tarapacá" de la Facultad de Ciencias Humanas de la Universidad Arturo Prat.